MATEMÁTICAS BÁSICAS

Autor: Lorenzo Acosta Gempeler
Edición: Jeanneth Galeano Peñaloza
Rafael Ballestas Rojano

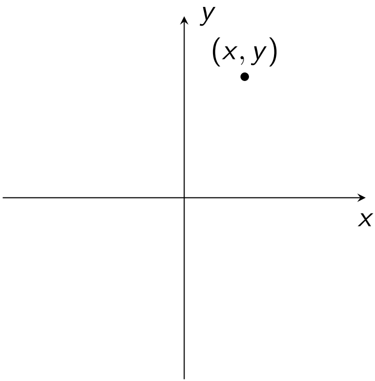
Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Sede Bogotá

Enero de 2015

Parte I

Relaciones

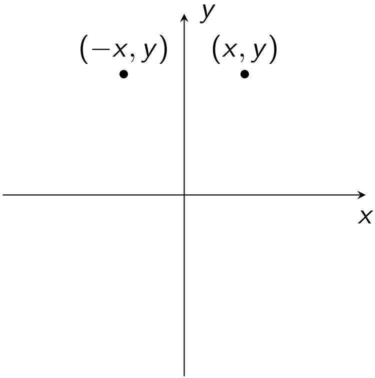
Observe que:



Simetrías

Observe que:

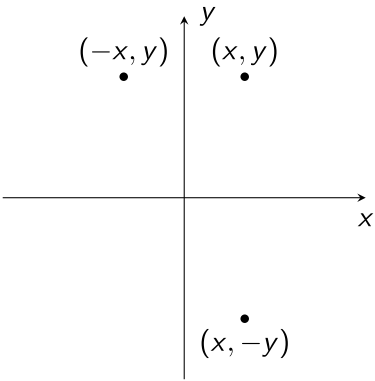
Los puntos (x, y) y $(-x, y)$ son simétricos con respecto al eje y.



Observe que:

Los puntos (x, y) y $(-x, y)$ son simétricos con respecto al eje y.

Los puntos (x, y) y $(x, -y)$ son simétricos con respecto al eje x.



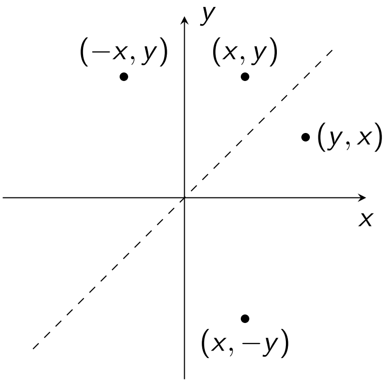
Simetrías

Observe que:

Los puntos (x, y) y $(-x, y)$ son simétricos con respecto al eje y.

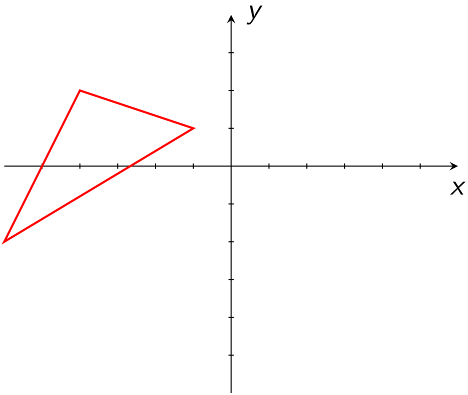
Los puntos (x, y) y $(x, -y)$ son simétricos con respecto al eje x.

Los puntos (x, y) y (y, x) son simétricos con respecto a la recta $y = x$.



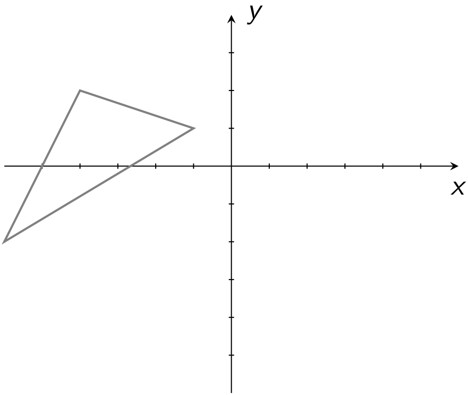
Ejemplo

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y)\}$$



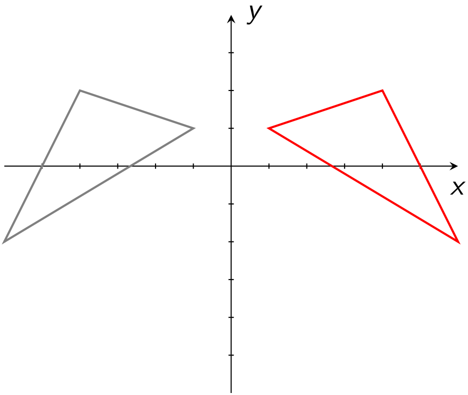
Ejemplo

$$T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(-x, y)\}$$



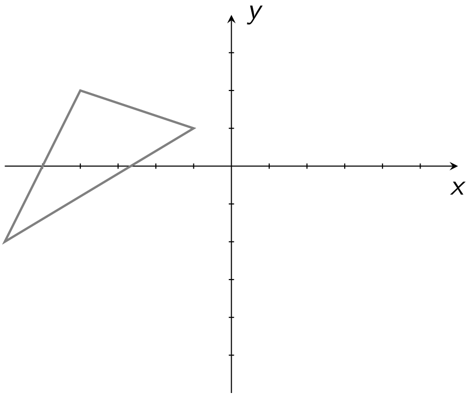
Ejemplo

$$T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(-x, y)\}$$



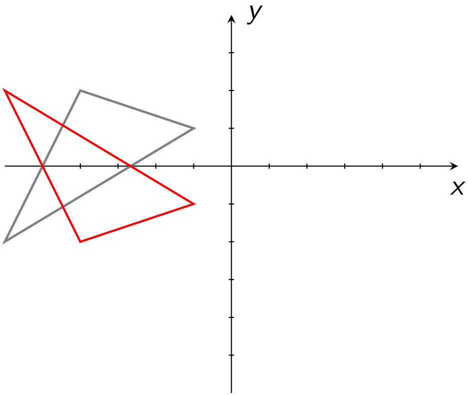
Ejemplo

$$T_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, -y)\right\}$$



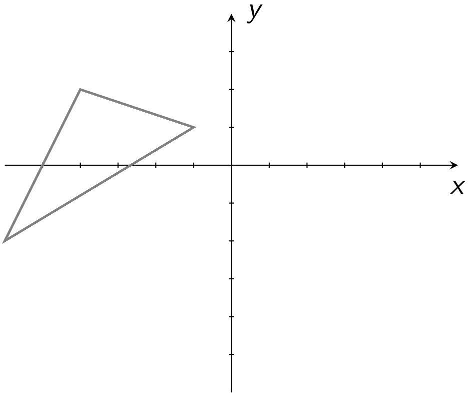
Ejemplo

$$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,-y)\}$$



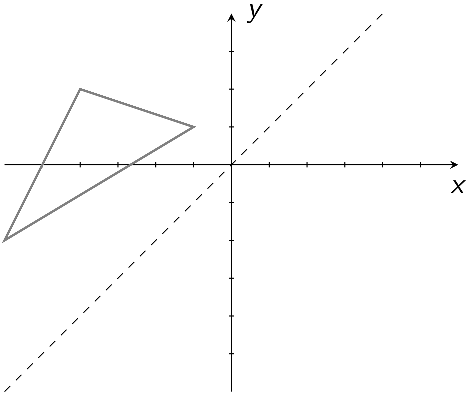
Ejemplo

$$T_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(y,x)\}$$



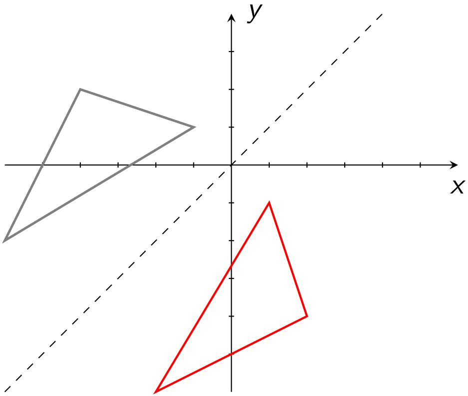
Ejemplo

$$T_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(y, x)\}$$



Ejemplo

$$T_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(y, x)\}$$



Propiedades

1. Si T es la relación definida por el predicado $p(x, y)$ y

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(-x, y)\}$$

entonces la gráfica de S se obtiene de la de T mediante una simetría con respecto al eje y.

2. Si T es la relación definida por el predicado $p(x,y)$ y

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,-y)\}$$

entonces la gráfica de U se obtiene de la de T mediante una simetría con respecto al eje x.

Propiedades

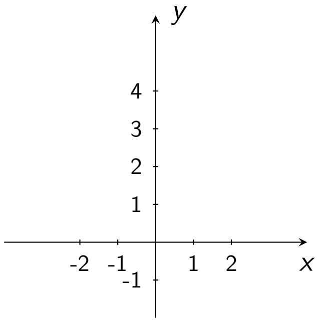
3. Si T es la relación definida por el predicado $p(x, y)$ y

$$V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(y, x)\right\}$$

entonces la gráfica de V se obtiene de la de T mediante una simetría con respecto a la recta $y = x$.

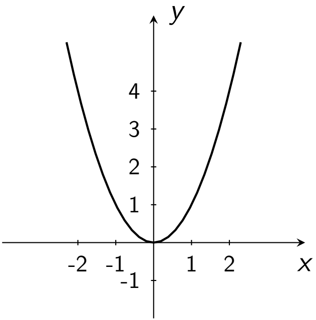
Realicemos estas variaciones a $p(x, y)$ en el ejemplo

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y)\}$$

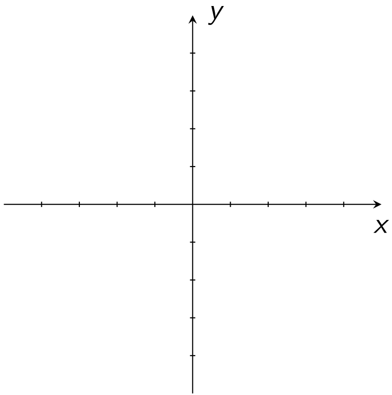


Realicemos estas variaciones a $p(x,y)$ en el ejemplo

$$P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y)\right\}$$

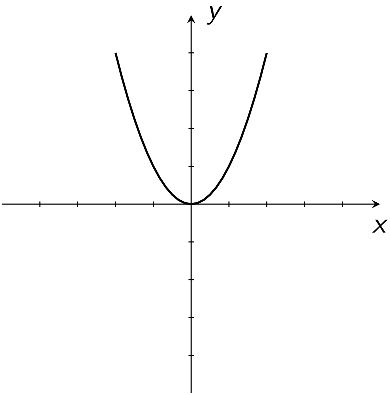


$$P_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = (-x)^2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(-x,y)\right\}$$

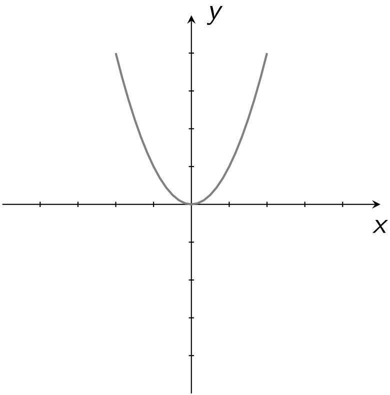


Transformaciones de Relaciones

$$P_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = (-x)^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(-x, y)\}$$

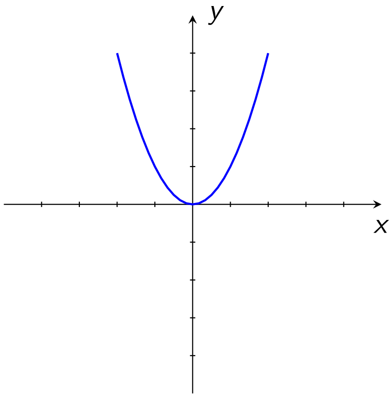


$$P_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=(-x)^2\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : p(-x,y)\right\}$$



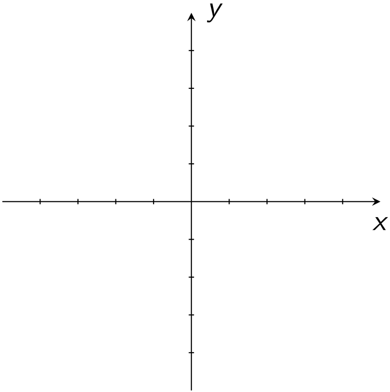
Transformaciones de Relaciones

$$P_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = (-x)^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(-x,y)\}$$

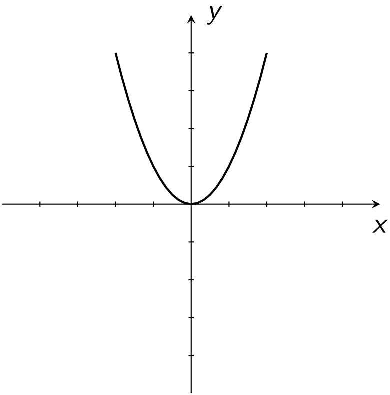


Transformaciones de Relaciones

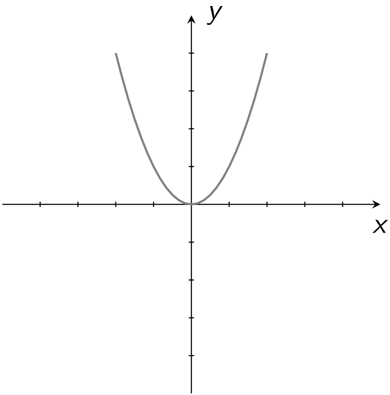
$$P_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -y = x^2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,-y)\right\}$$



$$P_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -y = x^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,-y)\}$$

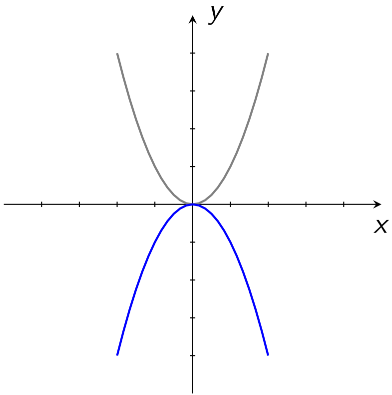


$$P_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -y = x^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,-y)\}$$

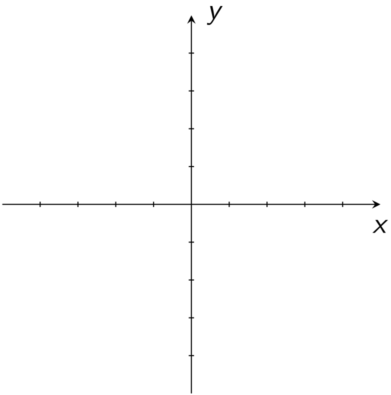


Transformaciones de Relaciones

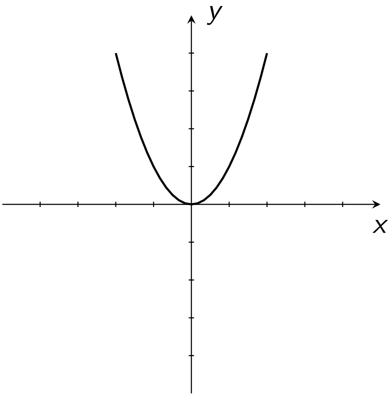
$$P_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y = x^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, -y)\}$$



$$P_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(y, x)\right\}$$

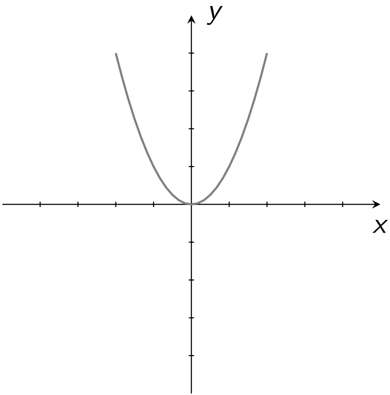


$$P_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(y, x)\right\}$$



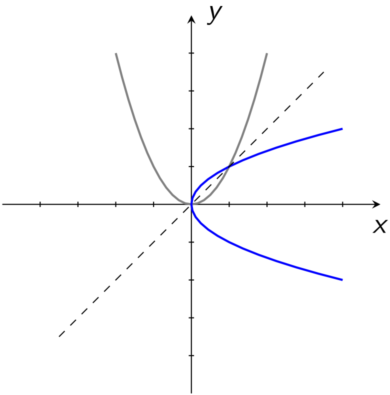
Transformaciones de Relaciones

$$P_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(y,x)\right\}$$



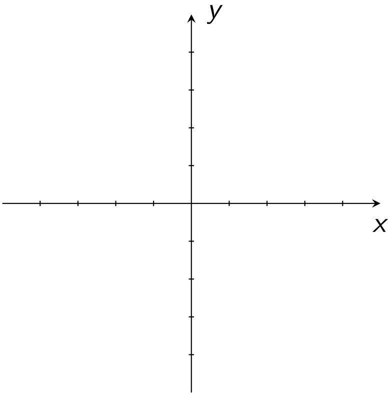
Transformaciones de Relaciones

$$P_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(y, x)\right\}$$



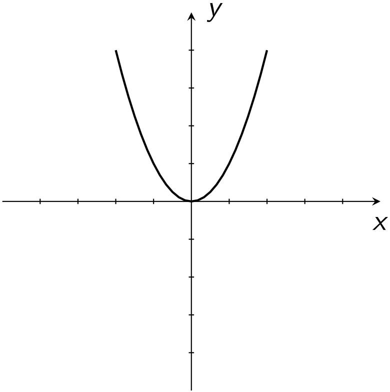
Transformaciones de Relaciones

$$P_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x = y^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(y,-x)\}$$

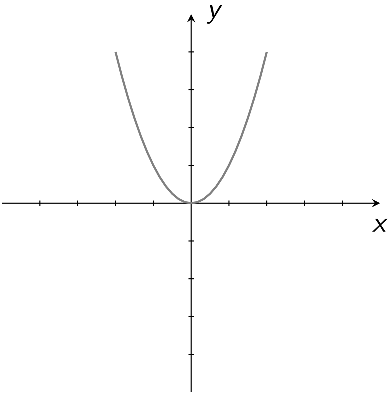


Transformaciones de Relaciones

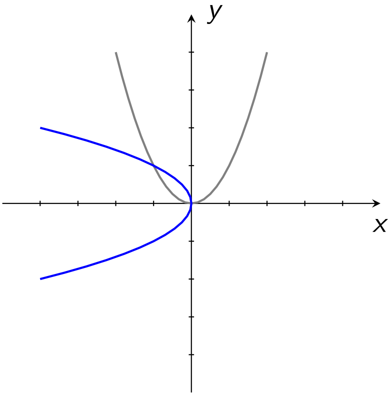
$$P_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x = y^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(y,-x)\}$$



$$P_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x = y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(y, -x)\}$$

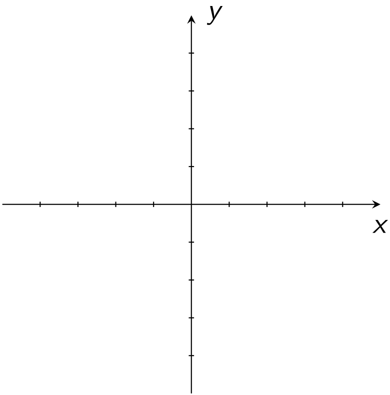


$$P_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x = y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(y, -x)\}$$

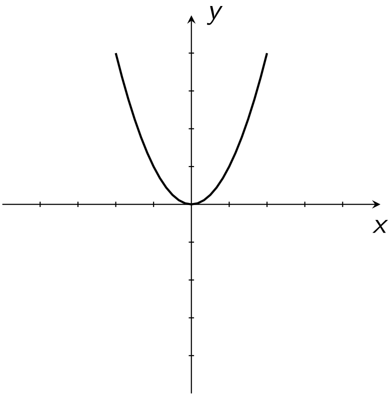


Apliquemos lo que hemos aprendido sobre compresiones, expansiones y simetrías para realizar, a partir de la gráfica de $y = x^2$, las gráficas de:

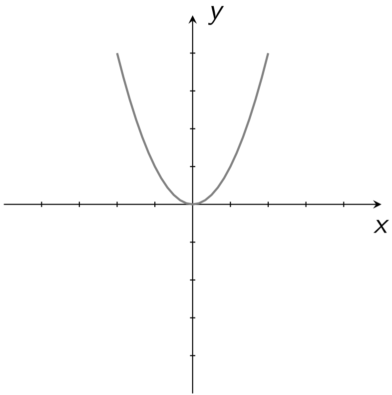
$$y = 4x^2$$



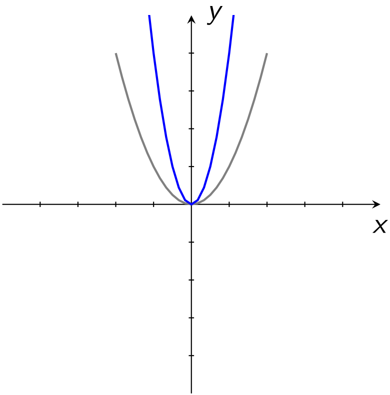
$$y = 4x^2$$



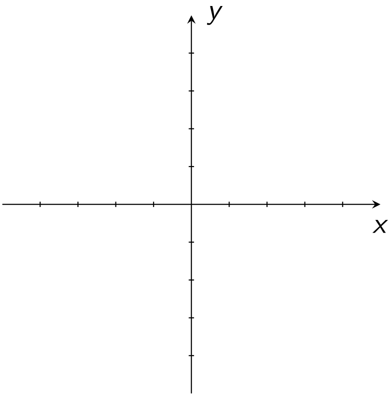
$$y = 4x^2$$



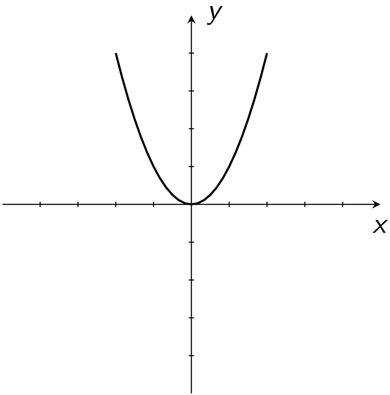
$$y = 4x^2$$



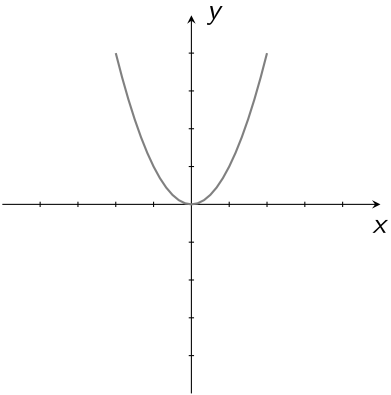
$$2y = x^2$$



$$2y = x^2$$

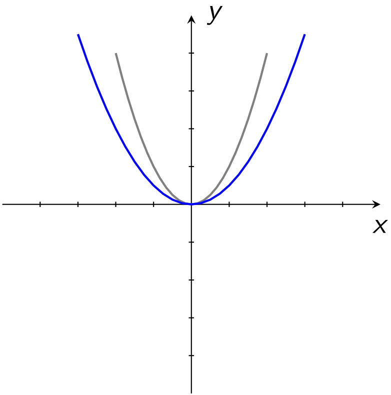


$$2y = x^2$$

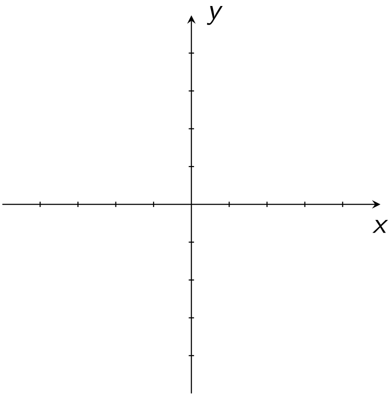


Transformaciones de Relaciones

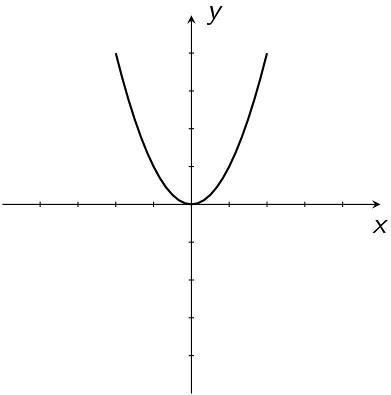
$$2y = x^2$$



$$y = -2x^2$$

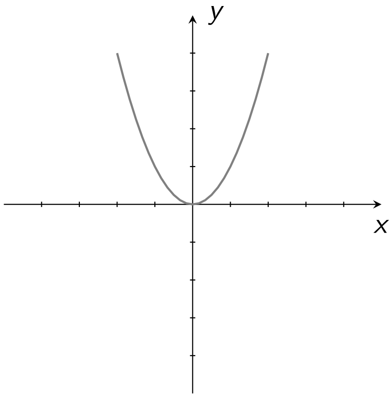


$$y = -2x^2$$

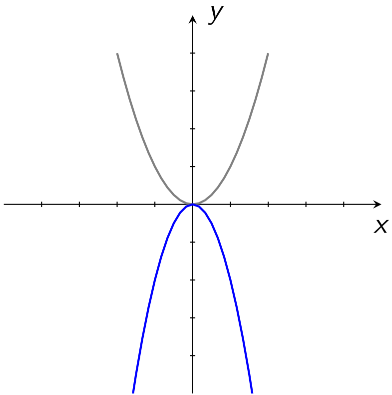


Transformaciones de Relaciones

$$y = -2x^2$$

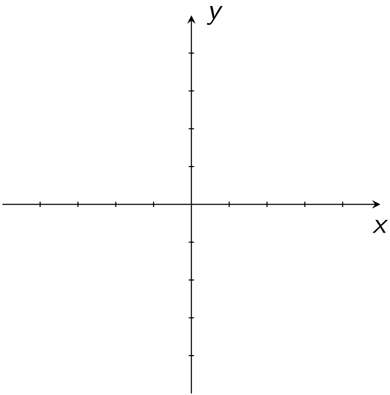


$$y = -2x^2$$

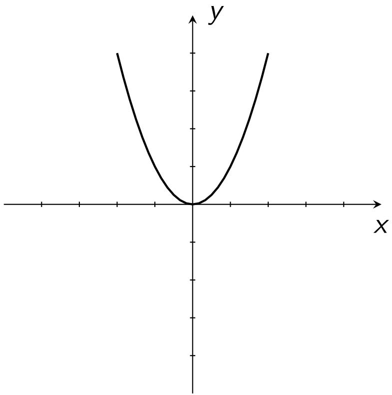


Transformaciones de Relaciones

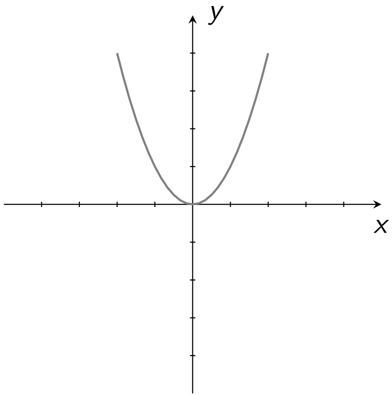
$$x = 3y^2$$



$$x = 3y^2$$

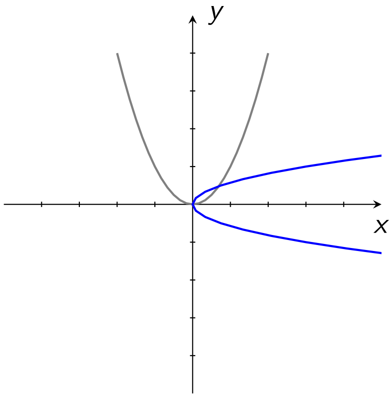


$$x = 3y^2$$

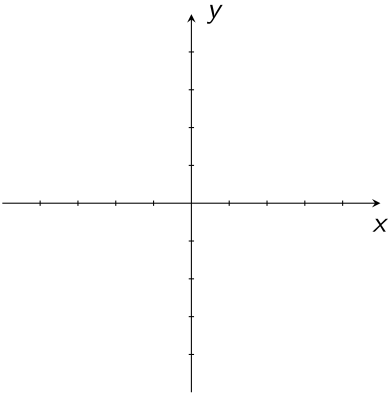


Transformaciones de Relaciones

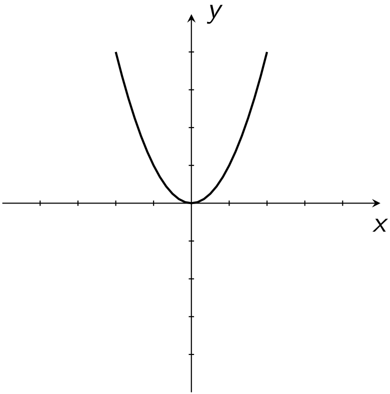
$$x = 3y^2$$



$$x = -4y^2$$

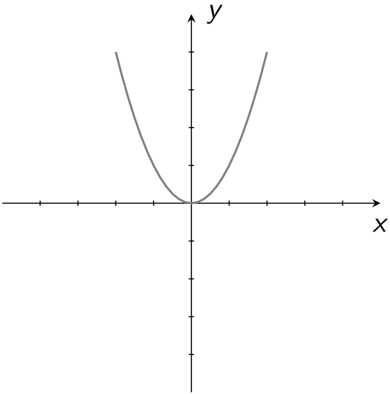


$$x = -4y^2$$

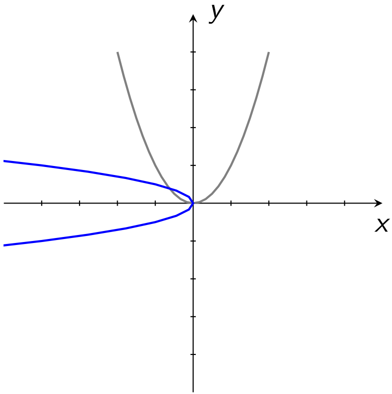


Transformaciones de Relaciones

$$x = -4y^2$$



$$x = -4y^2$$



Para obtener la gráfica de

$$4x^2 - 24x + 2y + 40 = 0$$

completamos cuadrado:

Para obtener la gráfica de

$$4x^2 - 24x + 2y + 40 = 0$$

completamos cuadrado:

$$4x^2 - 24x + 2y + 40 = 0$$

Transformaciones de Relaciones

Para obtener la gráfica de

$$4x^2 - 24x + 2y + 40 = 0$$

completamos cuadrado:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 24x + 2y + 40 &= 0 \\ 4(x^2 - 6x) &= -2y - 40 \end{aligned}$$

Para obtener la gráfica de

$$4x^2 - 24x + 2y + 40 = 0$$

completamos cuadrado:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 24x + 2y + 40 &= 0 \\ 4(x^2 - 6x) &= -2y - 40 \\ 4(x^2 - 6x \qquad) &= -2y - 40 \end{aligned}$$

Para obtener la gráfica de

$$4x^2 - 24x + 2y + 40 = 0$$

completamos cuadrado:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 24x + 2y + 40 &= 0 \\ 4(x^2 - 6x) &= -2y - 40 \\ 4(x^2 - 6x + 9) &= -2y - 40 + 36 \end{aligned}$$

Para obtener la gráfica de

$$4x^2 - 24x + 2y + 40 = 0$$

completamos cuadrado:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 24x + 2y + 40 &= 0 \\ 4(x^2 - 6x) &= -2y - 40 \\ 4(x^2 - 6x + 9) &= -2y - 40 + 36 \\ 4(x-3)^2 &= -2y - 4 \end{aligned}$$

Transformaciones de Relaciones

Para obtener la gráfica de

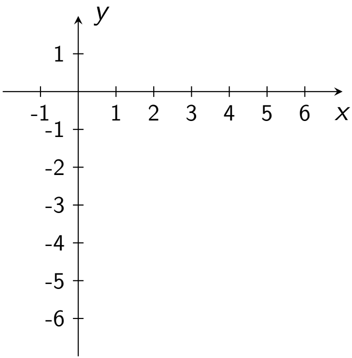
$$4x^2 - 24x + 2y + 40 = 0$$

completamos cuadrado:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 24x + 2y + 40 &= 0 \\ 4(x^2 - 6x) &= -2y - 40 \\ 4(x^2 - 6x + 9) &= -2y - 40 + 36 \\ 4(x-3)^2 &= -2y - 4 \\ -2(x-3)^2 &= y + 2 \end{aligned}$$

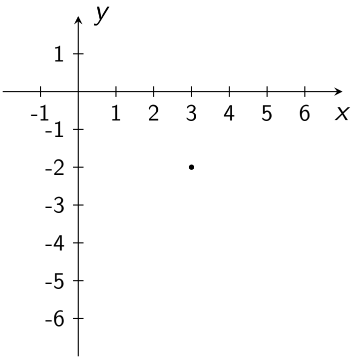
Es una parábola que abre hacia abajo y tiene el vértice en $(3, -2)$

$$-2(x-3)^2 = y+2$$



Es una parábola que abre hacia abajo y tiene el vértice en $(3, -2)$

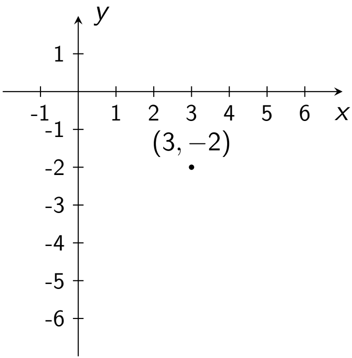
$$-2(x-3)^2 = y + 2$$



Transformaciones de Relaciones

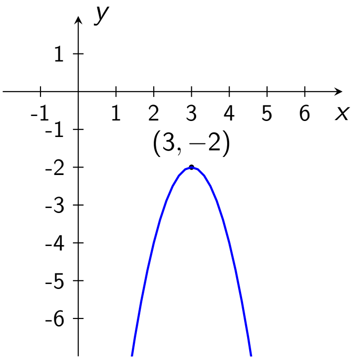
Es una parábola que abre hacia abajo y tiene el vértice en $(3, -2)$

$$-2(x-3)^2 = y + 2$$



Es una parábola que abre hacia abajo y tiene el vértice en $(3, -2)$

$$-2(x-3)^2 = y + 2$$



Conclusiones

Una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$, siempre representa una parábola.
Esta parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$.

Conclusiones

Una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$, siempre representa una parábola.
Esta parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$.

Al completar cuadrado la ecuación se transforma en

Conclusiones

Una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$, siempre representa una parábola.
Esta parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$.

Al completar cuadrado la ecuación se transforma en

$$y - k = a(x - h)^2$$

Conclusiones

Una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$, siempre representa una parábola.
Esta parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$.

Al completar cuadrado la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} y - k &= a(x-h)^2 \\ y &= a(x-h)^2 + k. \end{aligned}$$

Conclusiones

Una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$, siempre representa una parábola.
Esta parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$.

Al completar cuadrado la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} y - k &= a(x-h)^2 \\ y &= a(x-h)^2 + k. \end{aligned}$$

Aquí vemos que el vértice está en el punto (h, k).

Conclusiones

De manera similar, una ecuación de la forma

$$x = ay^2 + by + c$$

con $a \neq 0$, siempre representa una parábola.
Esta parábola abre hacia la derecha si $a > 0$ y abre hacia la izquierda si $a < 0$.

Conclusiones

De manera similar, una ecuación de la forma

$$x = ay^2 + by + c$$

con $a \neq 0$, siempre representa una parábola.
Esta parábola abre hacia la derecha si $a > 0$ y abre hacia la izquierda si $a < 0$.

Al completar cuadrado la ecuación se transforma en

Conclusiones

De manera similar, una ecuación de la forma

$$x = ay^2 + by + c$$

con $a \neq 0$, siempre representa una parábola.
Esta parábola abre hacia la derecha si $a > 0$ y abre hacia la izquierda si $a < 0$.

Al completar cuadrado la ecuación se transforma en

$$x - h = a(y - k)^2$$

Conclusiones

De manera similar, una ecuación de la forma

$$x = ay^2 + by + c$$

con $a \neq 0$, siempre representa una parábola.
Esta parábola abre hacia la derecha si $a > 0$ y abre hacia la izquierda si $a < 0$.

Al completar cuadrado la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} x - h &= a(y-k)^2 \\ x &= a(y-k)^2 + h. \end{aligned}$$

Conclusiones

De manera similar, una ecuación de la forma

$$x = ay^2 + by + c$$

con $a \neq 0$, siempre representa una parábola.
Esta parábola abre hacia la derecha si $a > 0$ y abre hacia la izquierda si $a < 0$.

Al completar cuadrado la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} x - h &= a(y-k)^2 \\ x &= a(y-k)^2 + h. \end{aligned}$$

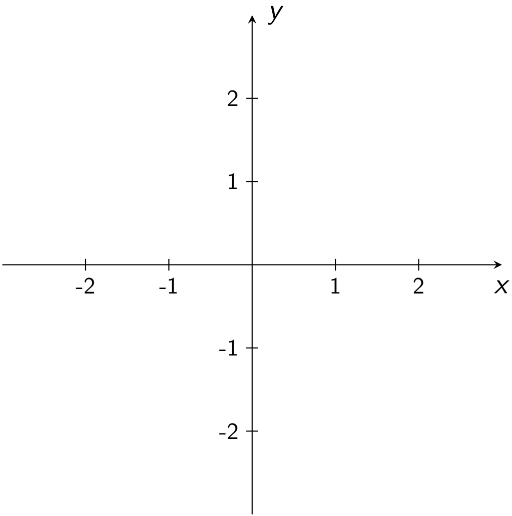
Aquí vemos que el vértice está en el punto (h, k).

Hipérbola

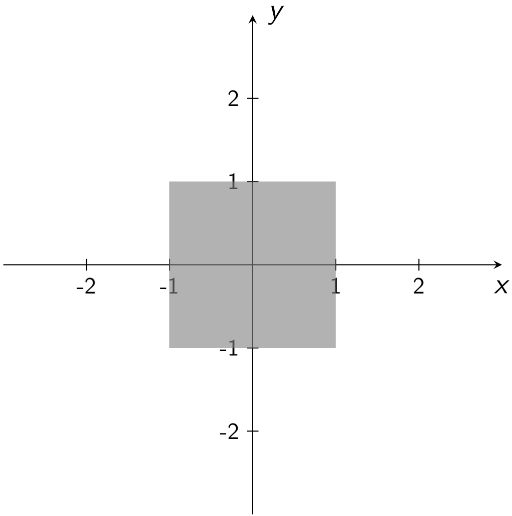
Estudiemos ahora el efecto de estos cambios sobre otra relación particular:

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$$

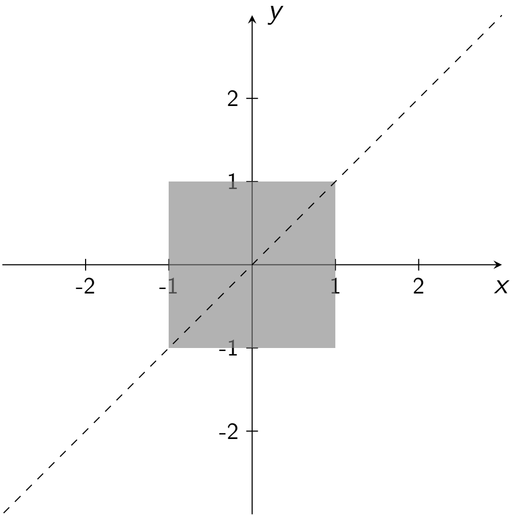
Hipérbola $x^2 - y^2 = 1$



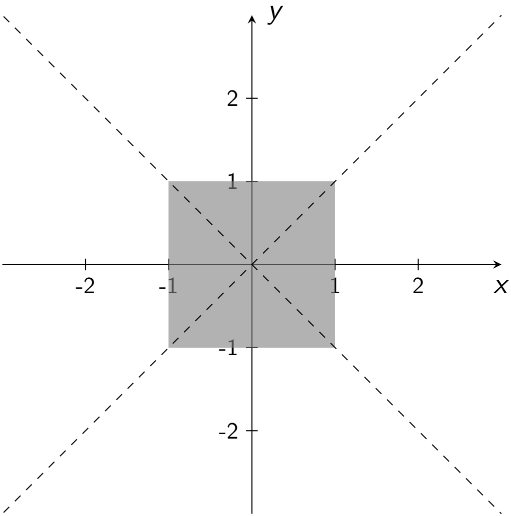
Hipérbola $x^2 - y^2 = 1$



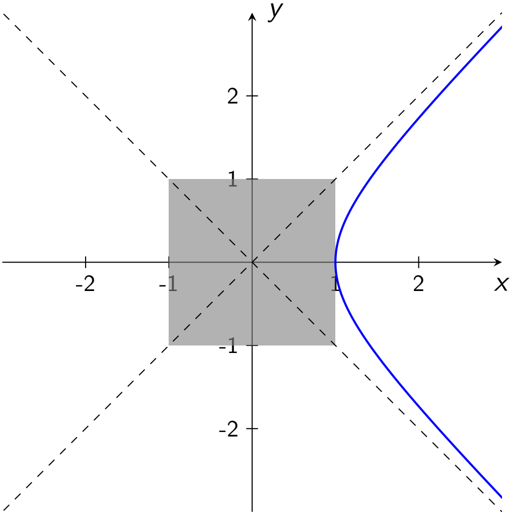
Hipérbola $x^2 - y^2 = 1$



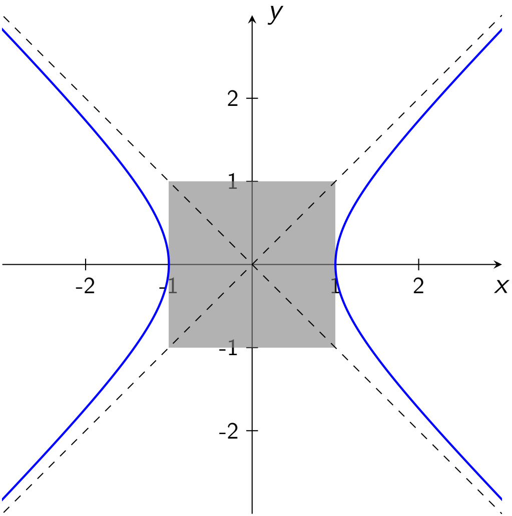
Hipérbola $x^2 - y^2 = 1$



Hipérbola $x^2 - y^2 = 1$



Hipérbola $x^2 - y^2 = 1$



Si cambiamos x por $\frac{x}{a}$ e y por $\frac{y}{b}$ obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Hipérbola

Si cambiamos x por $\frac{x}{a}$ e y por $\frac{y}{b}$ obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hipérbola

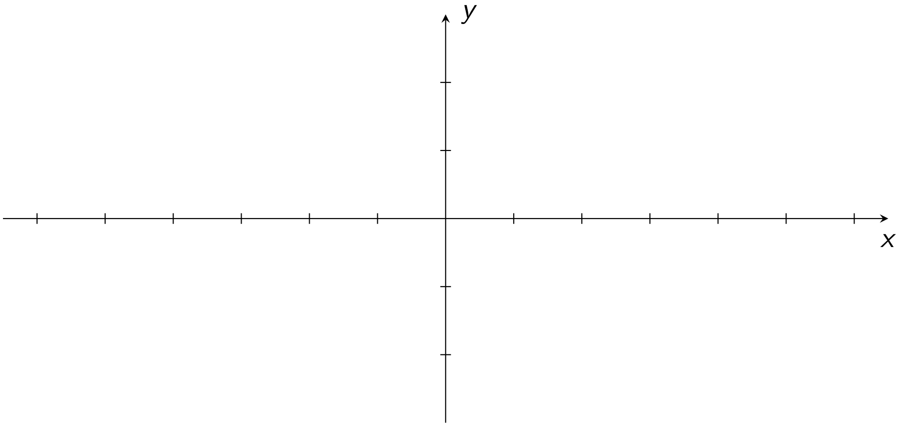
Si cambiamos x por $\frac{x}{a}$ e y por $\frac{y}{b}$ obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

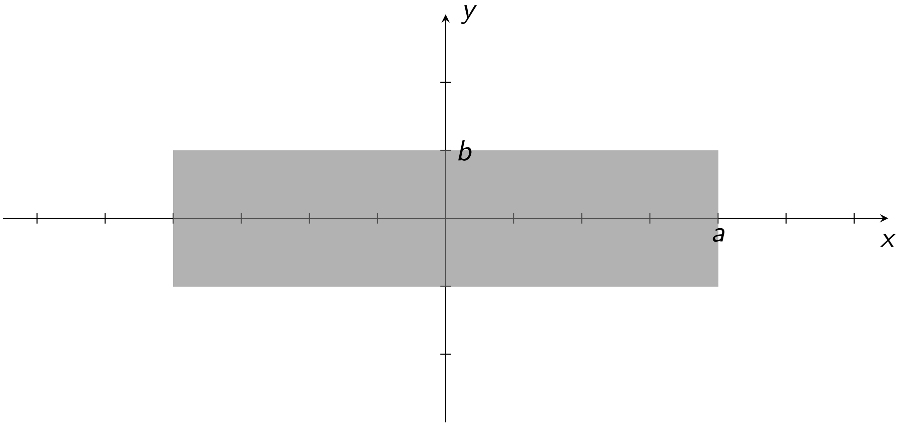
El cuadrado guía se transforma en un rectángulo y las asíntotas se transforman en las rectas

$$\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}.$$

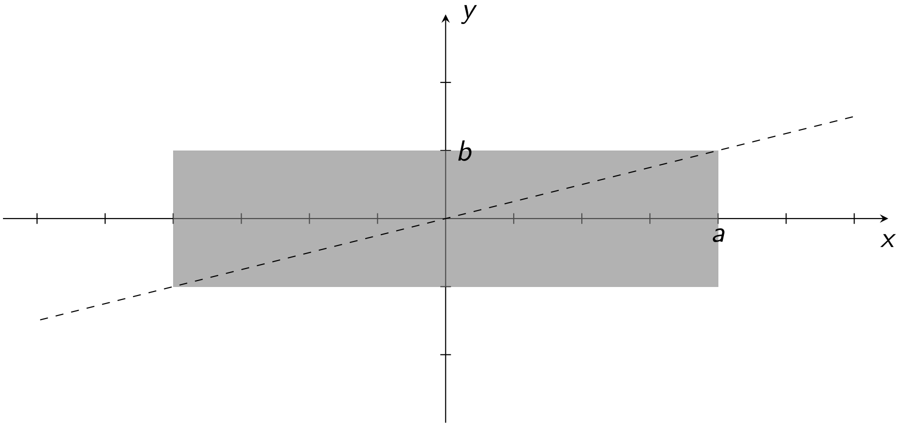
Hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

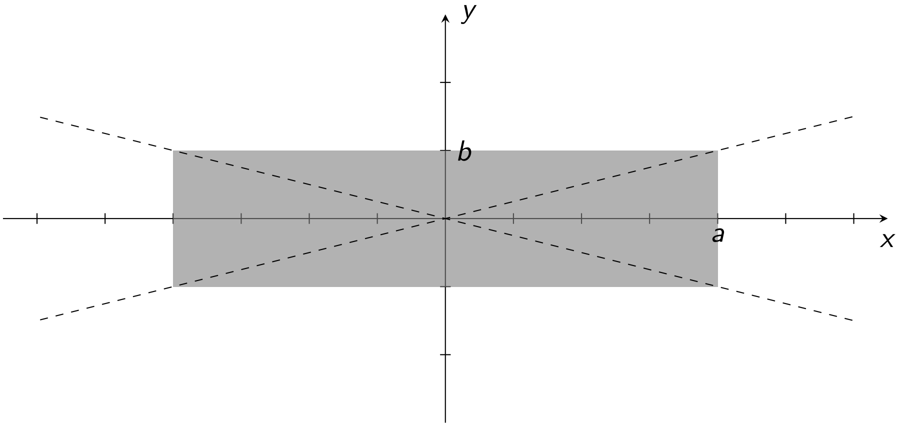


Hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

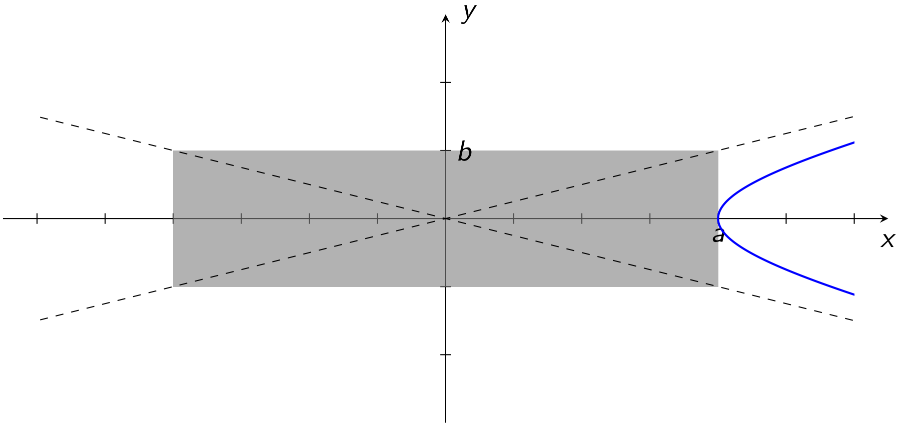


Hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

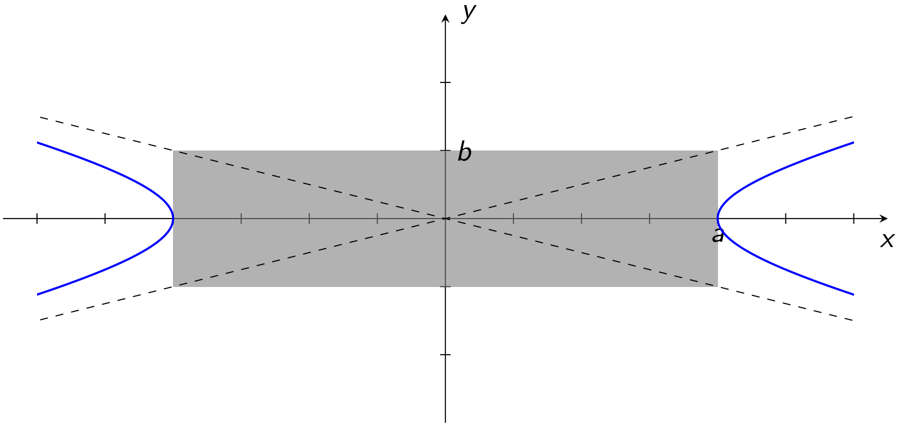



y
b
a
x

Hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Si a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

le aplicamos una transformación del tipo traslación, obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Si a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

le aplicamos una transformación del tipo traslación, obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Esta ecuación se llama ecuación canónica de una hipérbola con eje principal horizontal. Esta hipérbola tiene centro en el punto (h, k) y sus asíntotas tienen ecuaciones

$$\frac{x-h}{a} = \pm\frac{y-k}{b}.$$

Si a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

le aplicamos una transformación del tipo traslación, obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Esta ecuación se llama ecuación canónica de una hipérbola con eje principal horizontal. Esta hipérbola tiene centro en el punto (h, k) y sus asíntotas tienen ecuaciones

$$\frac{x-h}{a} = \pm\frac{y-k}{b}.$$

Las ramas de esta hipérbola abren hacia la derecha y hacia la izquierda.

Hipérbola

Si en la ecuación de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ intercambiamos las variables x e y llegamos a

$$y^2 - x^2 = 1$$

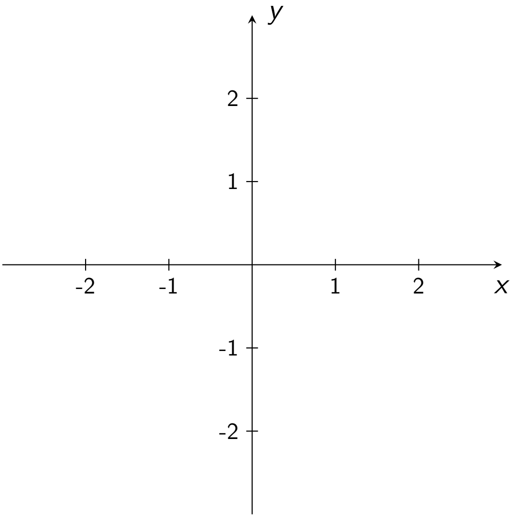
Hipérbola

Si en la ecuación de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ intercambiamos las variables x e y llegamos a

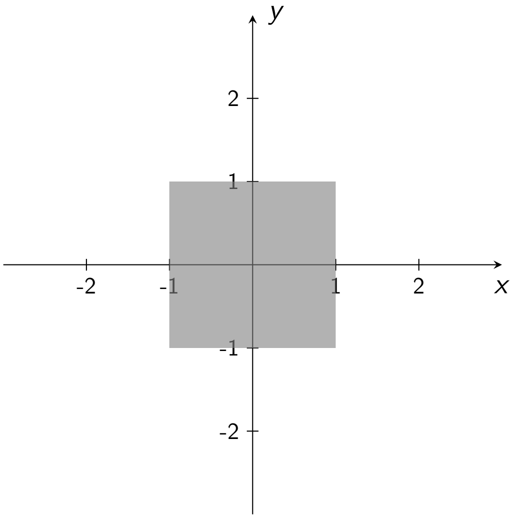
$$y^2 - x^2 = 1$$

La gráfica de esta ecuación se obtiene de la gráfica de H mediante una simetría con respecto a la recta $y = x$. Esta gráfica también es una hipérbola pero ahora su eje principal es vertical. Nótese que las asíntotas son las mismas de H.

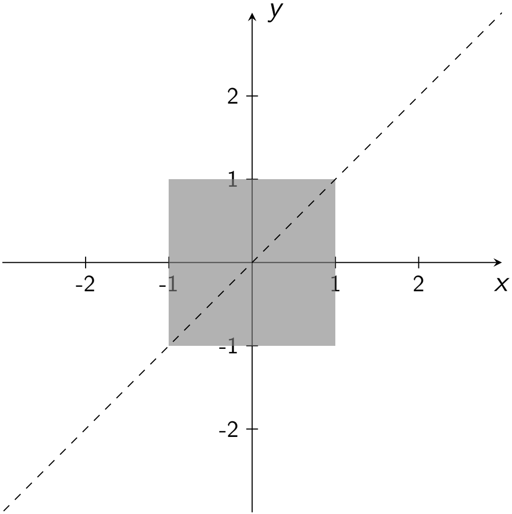
Hipérbola $y^2 - x^2 = 1$



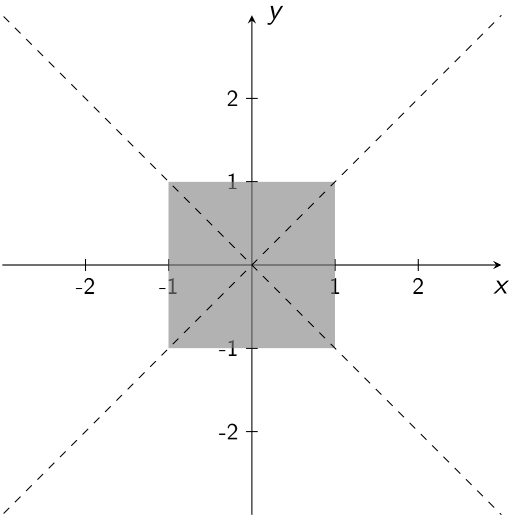
Hipérbola $y^2 - x^2 = 1$



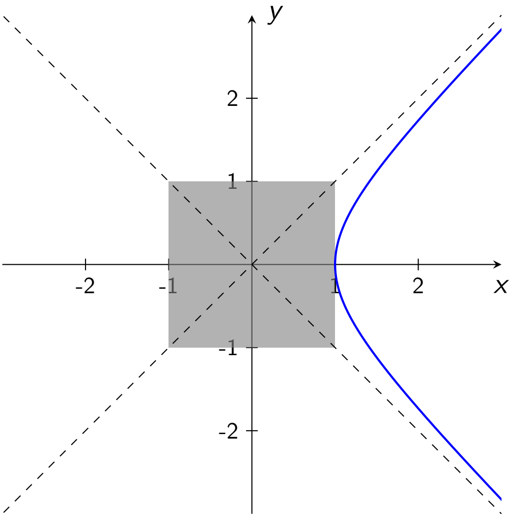
Hipérbola $y^2 - x^2 = 1$



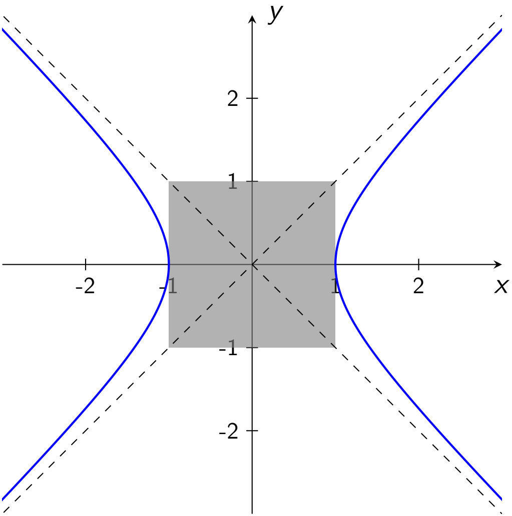
Hipérbola $y^2 - x^2 = 1$

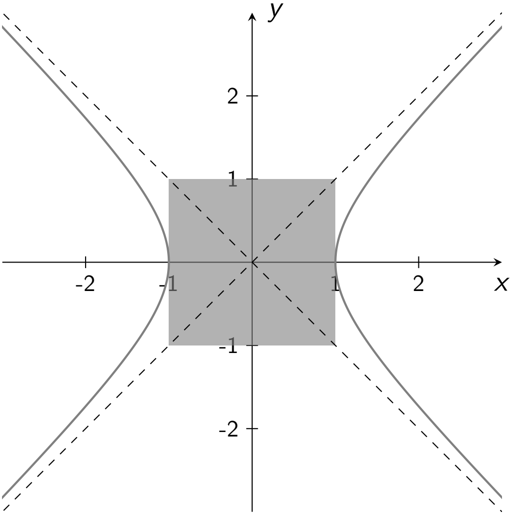


Hipérbola $y^2 - x^2 = 1$

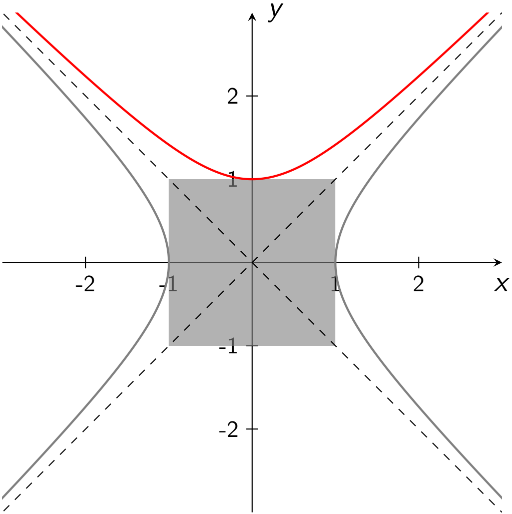


Hipérbola $y^2 - x^2 = 1$

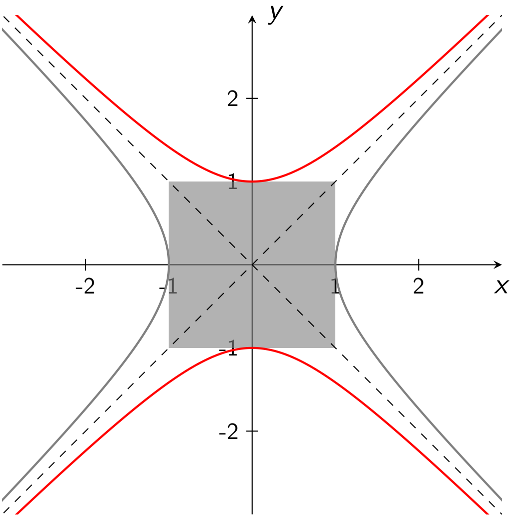



y
2
1
-2
-1
1
2
x
-1
-2

Hipérbola $y^2 - x^2 = 1$



Hipérbola $y^2 - x^2 = 1$



Hipérbola

El trabajo realizado hasta ahora nos permite concluir que una ecuación de la forma

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

Hipérbola

El trabajo realizado hasta ahora nos permite concluir que una ecuación de la forma

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

representa una hipérbola con eje principal vertical y centro (h, k).

Hipérbola

El trabajo realizado hasta ahora nos permite concluir que una ecuación de la forma

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

representa una hipérbola con eje principal vertical y centro (h, k).

Las asíntotas de esta hipérbola son

$$\frac{y-k}{b} = \pm\frac{x-h}{a}.$$

Hipérbola

El trabajo realizado hasta ahora nos permite concluir que una ecuación de la forma

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

representa una hipérbola con eje principal vertical y centro (h, k).

Las asíntotas de esta hipérbola son

$$\frac{y-k}{b} = \pm\frac{x-h}{a}.$$

Las ramas de esta hipérbola abren hacia arriba y hacia abajo.

Ejemplo 1

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 41 = 0$$

Ejemplo 1

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 41 &= 0 \\
4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= 41
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 41 &= 0 \\
4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= 41 \\
4(x^2 - 2x \qquad) - 9(y^2 + 2y \qquad) &= 41
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 41 = 0$$
$$4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) = 41$$
$$4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 2y \qquad) = 41 + 4$$

Ejemplo 1

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 41 = 0$$
$$4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) = 41$$
$$4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 2y + 1) = 41 + 4 - 9$$

Ejemplo 1

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 41 &= 0 \\
4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= 41 \\
4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 2y + 1) &= 41 + 4 - 9 \\
4(x-1)^2 - 9(y+1)^2 &= 36
\end{aligned}$$

Ejemplo 1

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 41 &= 0 \\
4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= 41 \\
4(x^2 - 2x {\color{red}+ 1}) - 9(y^2 + 2y {\color{red}+ 1}) &= 41 {\color{red}+ 4 - 9} \\
4(x-1)^2 - 9(y+1)^2 &= 36 \\
\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} &= 1
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1 (Cont.)

La ecuación

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

representa una hipérbola con eje principal horizontal y centro $(1, -1)$.

Ejemplo 1 (Cont.)

La ecuación

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

representa una hipérbola con eje principal horizontal y centro $(1, -1)$.

Sus asíntotas son

$$\frac{x-1}{3} = \pm\frac{y+1}{2}.$$

Ejemplo 1 (Cont.)

La ecuación

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

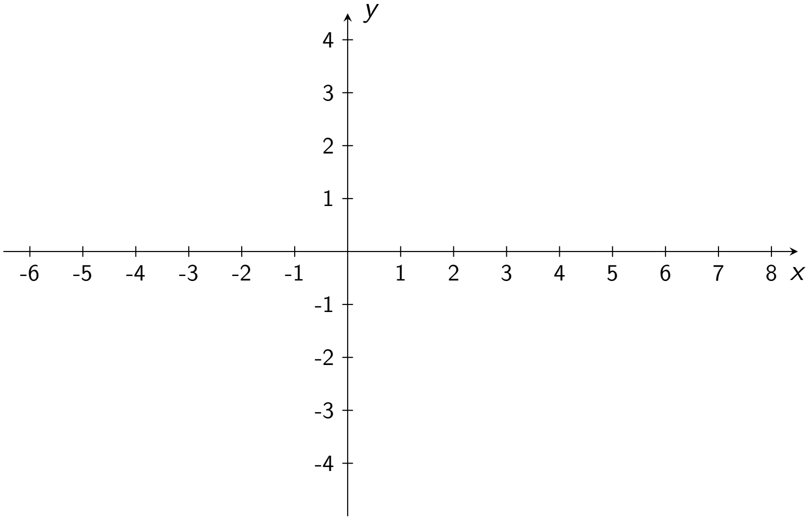
representa una hipérbola con eje principal horizontal y centro $(1, -1)$.

Sus asíntotas son

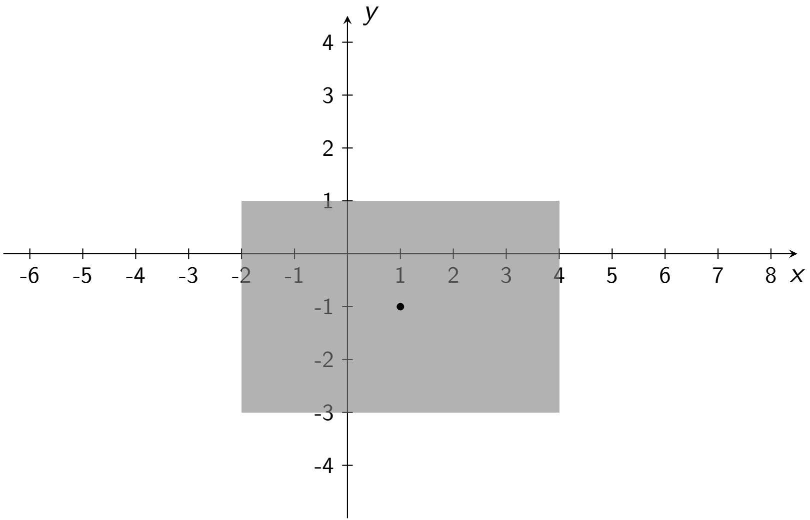
$$\frac{x-1}{3} = \pm\frac{y+1}{2}.$$

Abre hacia la izquierda y hacia la derecha.

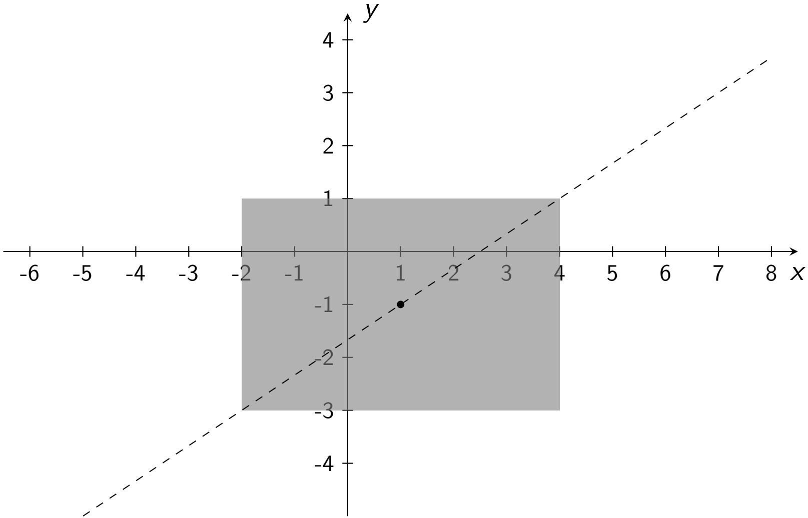
Ejemplo 1: $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$



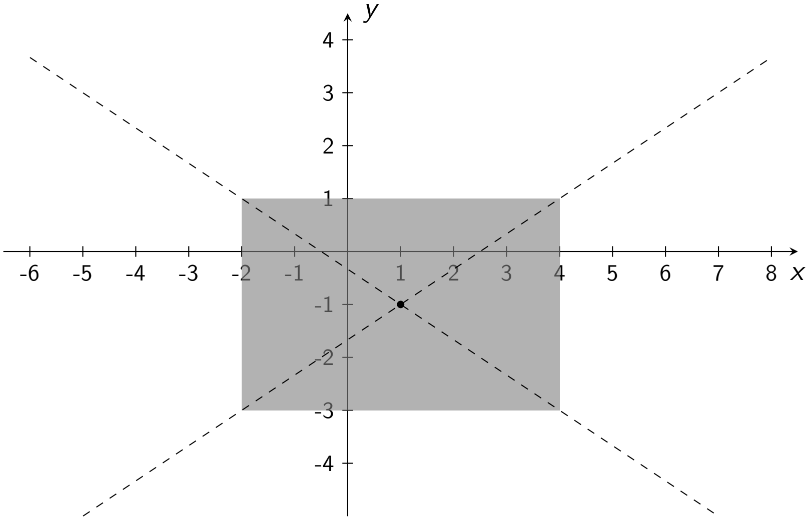
Ejemplo 1: $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$



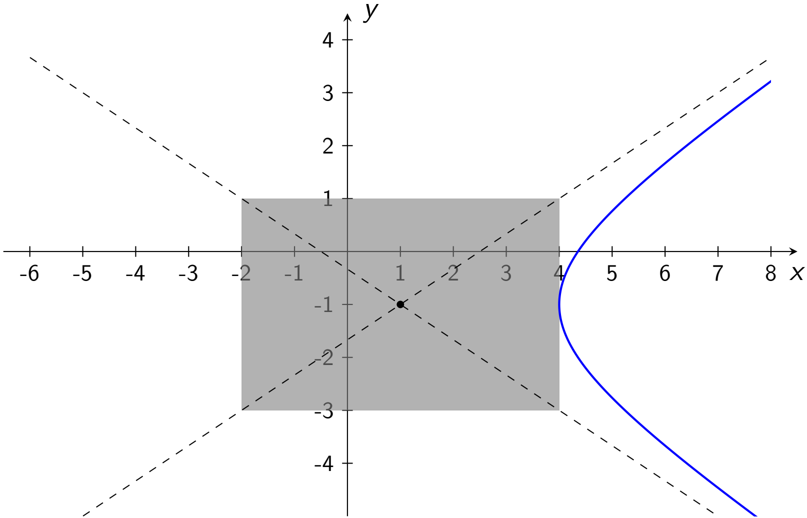
Ejemplo 1: $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$



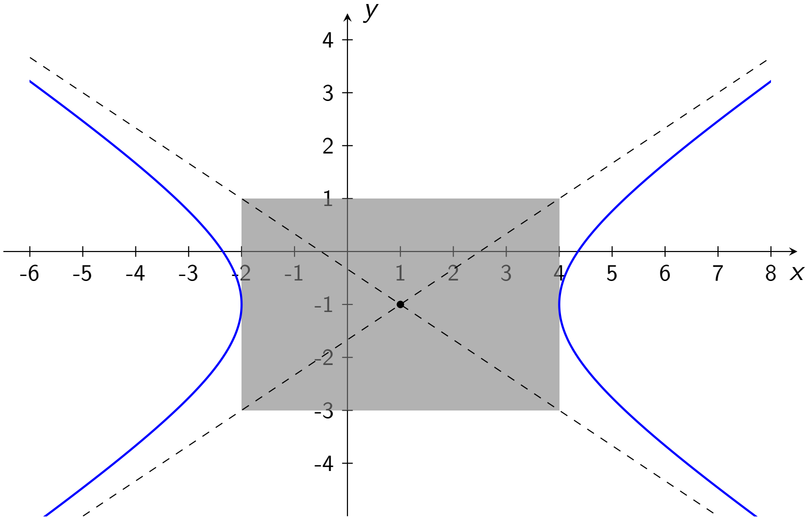
Ejemplo 1: $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$



Ejemplo 1: $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$



Ejemplo 1: $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$



Ejemplo 2

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y + 31 = 0$$

Ejemplo 2

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y + 31 = 0$$
$$4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) = -31$$

Ejemplo 2

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y + 31 = 0$$
$$4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) = -31$$
$$4(x^2 - 2x \qquad) - 9(y^2 + 2y \qquad) = -31$$

Ejemplo 2

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y + 31 &= 0 \\ 4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= -31 \\ 4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 2y \qquad) &= -31 + 4 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y + 31 = 0$$
$$4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) = -31$$
$$4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 2y + 1) = -31 + 4 - 9$$

Ejemplo 2

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y + 31 &= 0 \\
4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= -31 \\
4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 2y + 1) &= -31 + 4 - 9 \\
4(x-1)^2 - 9(y+1)^2 &= -36
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y + 31 &= 0 \\
4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= -31 \\
4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 2y + 1) &= -31 + 4 - 9 \\
4(x-1)^2 - 9(y+1)^2 &= -36 \\
-\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} &= 1
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Reconocer la hipérbola a partir de la ecuación

$$\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y + 31 &= 0 \\
4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= -31 \\
4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 2y + 1) &= -31 + 4 - 9 \\
4(x-1)^2 - 9(y+1)^2 &= -36 \\
-\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} &= 1 \\
\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} &= 1
\end{aligned}$$

Ejemplo 2 (Cont.)

La ecuación

$$\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$$

representa una hipérbola con eje principal vertical y centro $(1, -1)$.

Ejemplo 2 (Cont.)

La ecuación

$$\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$$

representa una hipérbola con eje principal vertical y centro $(1, -1)$.

Sus asíntotas son

$$\frac{x-1}{3} = \pm\frac{y+1}{2}.$$

Ejemplo 2 (Cont.)

La ecuación

$$\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$$

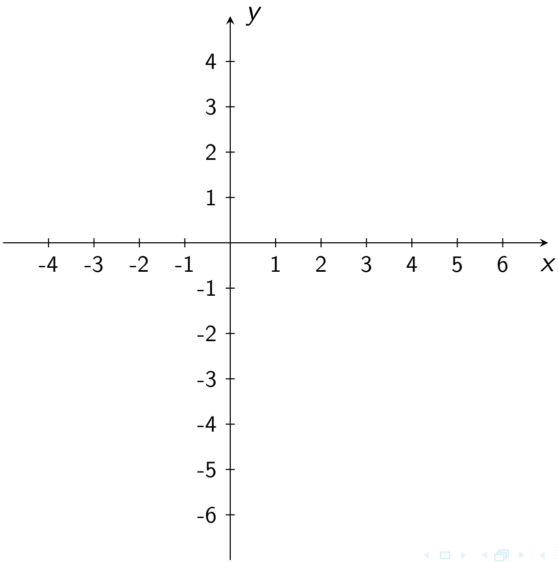
representa una hipérbola con eje principal vertical y centro $(1, -1)$.

Sus asíntotas son

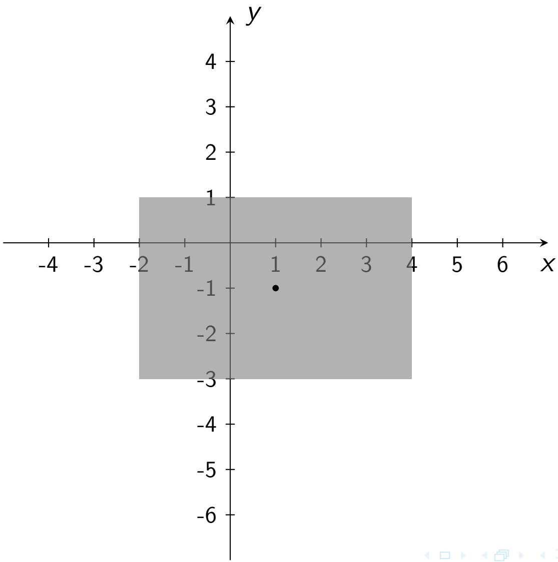
$$\frac{x-1}{3} = \pm\frac{y+1}{2}.$$

Abre hacia arriba y hacia abajo.

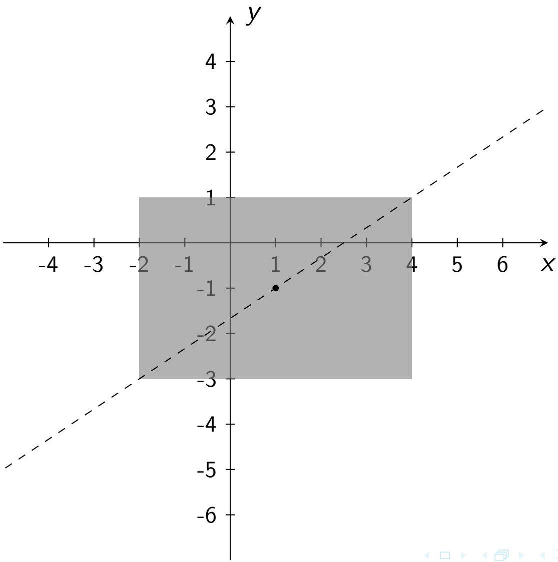
Ejemplo 2: $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$



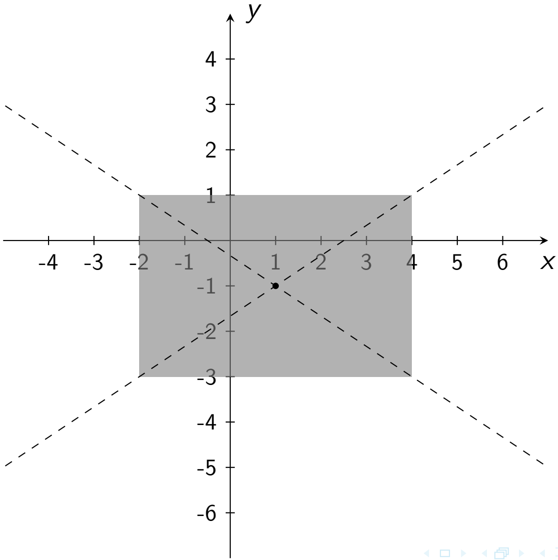
Ejemplo 2: $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$



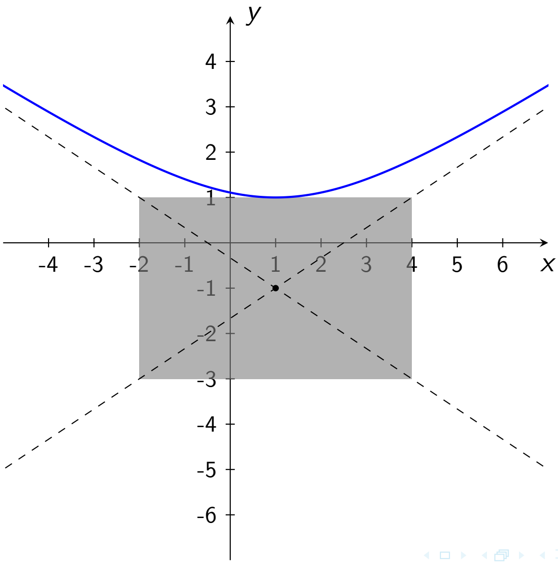
Ejemplo 2: $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$



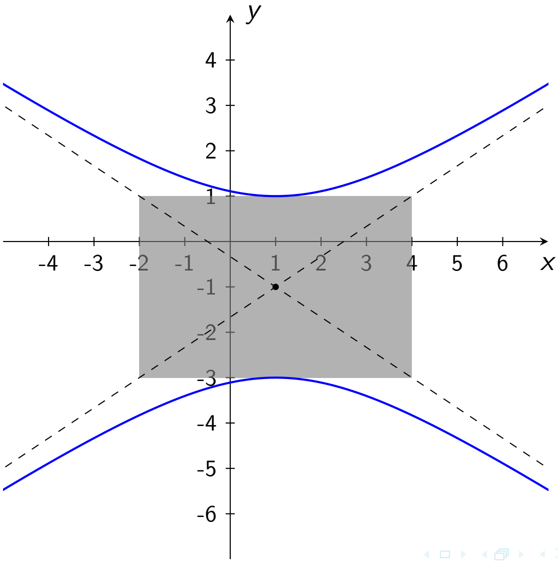
Ejemplo 2: $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$



Ejemplo 2: $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$



Ejemplo 2: $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$



Caso especial

A partir de la ecuación

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 5 = 0$$

Caso especial

A partir de la ecuación

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 5 &= 0 \\ 4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= 5 \end{aligned}$$

Caso especial

A partir de la ecuación

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 5 &= 0 \\
4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= 5 \\
4(x^2 - 2x \qquad) - 9(y^2 + 2y \qquad) &= 5
\end{aligned}
$$

Caso especial

A partir de la ecuación

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 5 &= 0 \\ 4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= 5 \\ 4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 2y \qquad) &= 5 + 4 \end{aligned}$$

Caso especial

A partir de la ecuación

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 5 &= 0\\
4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= 5\\
4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 2y + 1) &= 5 + 4 - 9
\end{aligned}
$$

Caso especial

A partir de la ecuación

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 5 &= 0 \\
4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= 5 \\
4(x^2 - 2x {\color{red}+1}) - 9(y^2 + 2y {\color{red}+1}) &= 5 {\color{red}+4-9} \\
4(x-1)^2 - 9(y+1)^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Caso especial

A partir de la ecuación

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 5 &= 0 \\
4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= 5 \\
4(x^2 - 2x {\color{red}+ 1}) - 9(y^2 + 2y {\color{red}+ 1}) &= 5 {\color{red}+ 4 - 9} \\
4(x-1)^2 - 9(y+1)^2 &= 0 \\
4(x-1)^2 &= 9(y+1)^2
\end{aligned}
$$

A partir de la ecuación

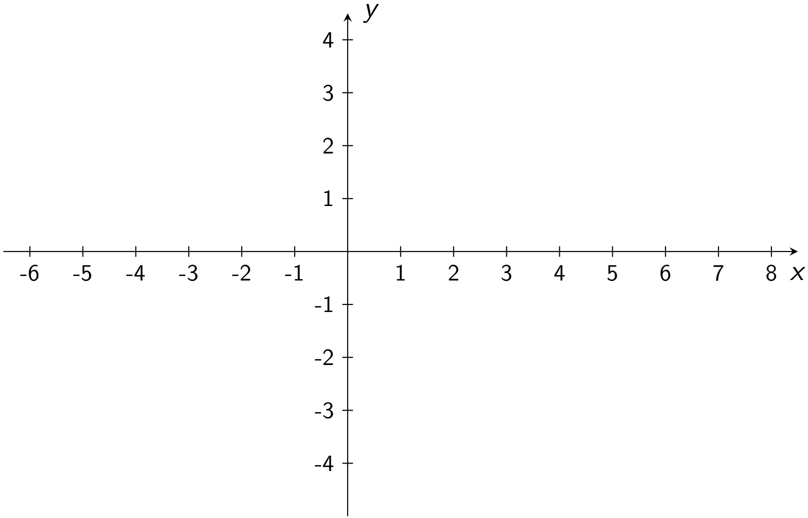
$$
\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 5 &= 0 \\
4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= 5 \\
4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 2y + 1) &= 5 + 4 - 9 \\
4(x-1)^2 - 9(y+1)^2 &= 0 \\
4(x-1)^2 &= 9(y+1)^2 \\
\frac{(x-1)^2}{9} &= \frac{(y+1)^2}{4}
\end{aligned}
$$

A partir de la ecuación

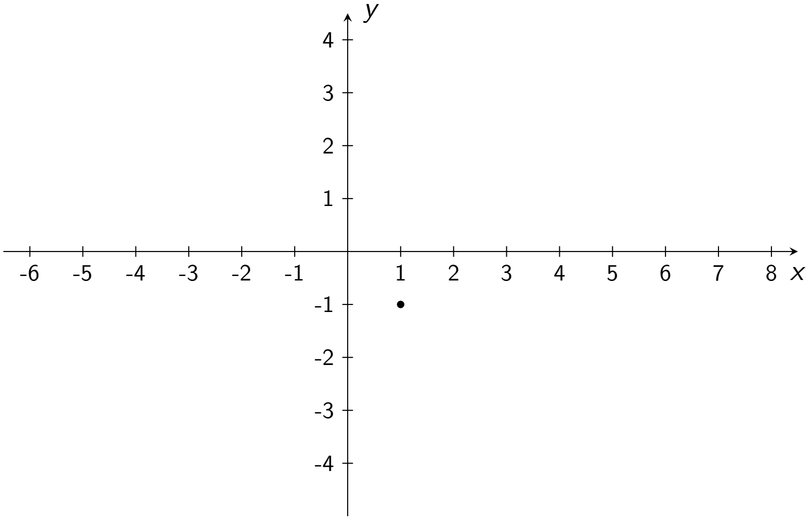
$$\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 5 &= 0\\
4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) &= 5\\
4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 2y + 1) &= 5 + 4 - 9\\
4(x-1)^2 - 9(y+1)^2 &= 0\\
4(x-1)^2 &= 9(y+1)^2\\
\frac{(x-1)^2}{9} &= \frac{(y+1)^2}{4}\\
\frac{(x-1)}{3} &= \pm\frac{(y+1)}{2}
\end{aligned}$$

Tenemos dos rectas que se cortan en el punto $(1, -1)$.

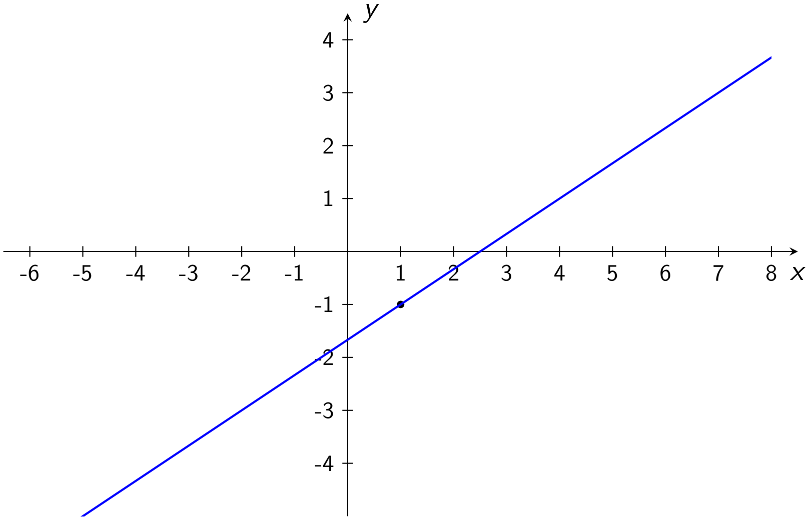
Caso especial: $\frac{(y+1)}{2} = \pm\frac{(x-1)}{3}$



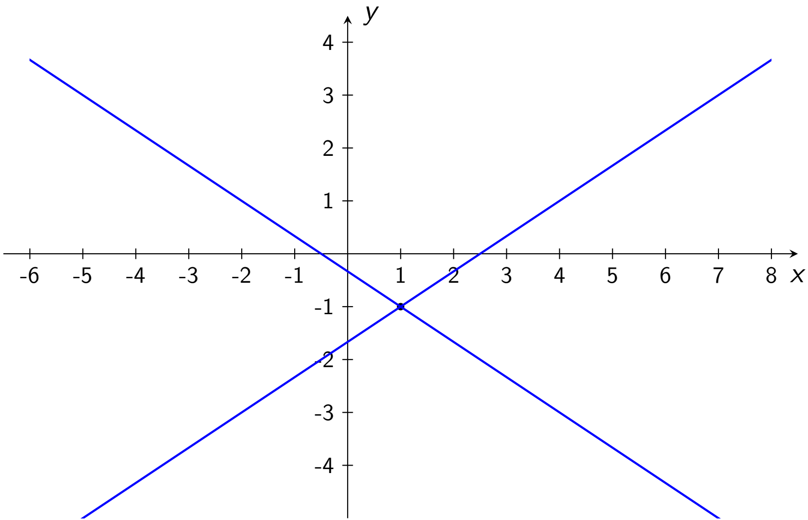
Caso especial: $\frac{(y+1)}{2} = \pm\frac{(x-1)}{3}$



Caso especial: $\frac{(y+1)}{2} = \pm\frac{(x-1)}{3}$



Caso especial: $\frac{(y+1)}{2} = \pm\frac{(x-1)}{3}$



Caso especial: $\frac{(y+1)}{2} = \pm\frac{(x-1)}{3}$